Concursul Experior Ediţia a VI-a

Baraj, 23.11.2013   Clasa a X-a

Subiecte

(4p) 1. Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x^3 = y^2 \\ \log_4 \frac{x}{y} = \log_y x \end{cases}$ $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Se dă ecuaţia (E) $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = \sqrt[n]{x^2-1}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(1p) a) Dacă $a = \sqrt[n]{x+1}$ şi $b = \sqrt[n]{x-1}$, arătaţi că $x = \frac{a^n+b^n}{2}$.

(2p) b) Dacă x este soluţie a ecuaţiei (E), arătaţi că $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} \in \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$.

(2p) c) Folosind eventual a) şi b), rezolvaţi ecuaţia (E).

Se acordă 1p din oficiu. Timp de lucru 1h.

Barem de corectare

Pb1.

Condiţii de existenţă $x > 0 \Rightarrow y > 0; y \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ $x = y^{\frac{2}{3}}$ sau $3\log_4 x = 2\log_4 y$	1p
$\log_4 y^{-\frac{1}{3}} = \log_y y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \log_4 y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = 4^{-2}$	2p
$x = 4^{-\frac{4}{3}}$	1p

Pb2.

a) Condiţii de existenţă $x^2 - 1 \geq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. $a^n = x + 1$, $b^n = x - 1$, $a^n + b^n = 2x$	1p
b) $\sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{\sqrt[n]{x+1}}{\sqrt[n]{x-1}} = \frac{a}{b}$; substituim a şi b în (E) $\Rightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$; avem $b \neq 0$, altfel $x = 1$, de unde $\sqrt[n]{4} = 0$ fals $\Rightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \in \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$	1p 1p

c) cazul I. $\frac{a}{b}=2 \Longrightarrow \begin{cases} a^n = 2^n b^n \\ a^n = x+1 \\ b^n = x-1 \end{cases} \Longrightarrow b^n(2^n-1)=2 \Longrightarrow \begin{cases} b^n = \frac{2}{2^n-1} \\ a^n = \frac{2^{n+1}}{2^n-1} \end{cases}$ din a) $\Longrightarrow x_1 = \frac{2^n+1}{2^n-1} > 1$	1p
cazul II. $\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} b^n = 2^n a^n \\ a^n = x+1 \\ b^n = x-1 \end{cases} \Longrightarrow a^n(2^n-1)=-2 \Longrightarrow \begin{cases} a^n = -\frac{2}{2^n-1} \\ b^n = -\frac{2^{n+1}}{2^n-1} \end{cases}$ din a) $\Longrightarrow x_2 = -\frac{2^n+1}{2^n-1} < -1$	1p